View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Almae Matris Studiorum Campus

Esercizio 13

Descrizione del sistema:

Un'azienda deve lavorare n diversi prodotti su m macchine. La lavorazione di un generico prodotto j in una generica macchina i richiede un tempo di lavorazione pari a p_{ij}, se eseguito in modalità "standard". Ogni lavoro (di un prodotto su una macchina) può però essere eseguito in modalità "crash": in questo caso si stima un costo pari a c_j e il tempo di lavorazione è ridotto della metà rispetto a quello "standard".
Le macchine sono raggruppate in K cluster contenenti insiemi disguinti di macchine, nel generico cluster l è contenuto l'insieme di macchine C_l. Viene fornita una matrice A in cui $a_{jl} = 1$ se il prodotto j deve essere lavorato in esattamente una delle macchine contenute nel cluster l e $a_{jl} = 0$ se, non è necessario eseguire nessuna lavorazione per il prodotto j in nessuna delle macchine in C_l. Di conseguenza, ogni prodotto potrà essere lavorato su più macchine appartenenti a cluster diversi.
L'obiettivo è quello di definire in quali macchine ogni prodotto deve essere lavorato in modo da minimizzare il *makespan* complessivo tenendo conto del fatto che è possibile eseguire le lavorazioni in modalità "crash" fino ad un budget di costo massimo pari a B.

Modello di Programmazione Lineare Intera:

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } j \text{ viene eseguito dalla macchina } i \text{ in modalità standard} \\ 0 & \text{altrimenti} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m; \end{cases}$$

$$y_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se il lavoro } j \text{ viene eseguito dalla macchina } i \text{ in modalità “crush”} \\ 0 & \text{altrimenti} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m; \end{cases}$$

$$\min z \tag{1a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{ij}}{2} y_{ij} \leq z, \quad i = 1, \dots m$$

$$\sum_{i \in C_l} (x_{ij} + y_{ij}) = a_{jl}, \quad l = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_j y_{ij} \leq B \tag{1b}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots m; j = 1, \dots, n$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots m; j = 1, \dots, n$$

Esercizio 14

Descrizione del sistema:

Un'azienda deve definire il piano di produzione per i prossimi m mesi relativamente a un determinato prodotto. Per un generico mese i si ha un domanda pari a d_i, un costo di stoccaggio in magazzino pari a r_i e un costo variabile unitario di produzione pari a c_i. Inoltre, se almeno una unità viene lavorata durante il mese in questione, si applicano dei costi fissi pari a K_i. Considerando che il magazzino può stoccare al massimo D unità di prodotto, si vuole individuare il piano di produzione che minimizzi il costo complessivo.

Modello di Programmazione Lineare Intera:

$$x_i := \text{quantità lavorata nel mese } i \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$s_i := \text{quantità stoccata nel mese } i \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$y_i := \begin{cases} 1 & \text{se produco almeno una unità nel mese } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m;$$

$$\min \sum_{i}^{m} K_i y_i + \sum_{i}^{m} c_i x_i + \sum_{i}^{m} r_i s_i \tag{2a}$$

$$s_i \le D \qquad \forall i = 1, \ldots, m \tag{2b}$$

$$x_i + s_{i-1} - s_i = d_i \qquad \forall i = 1, \ldots, m \tag{2c}$$

$$x_i \le M y_i \qquad \forall i = 1, \ldots, m \tag{2d}$$

$$x_i, s_i \ge 0 \quad \text{intere} \qquad \forall i = 1, \ldots, m \tag{2e}$$

Esercizio 15

Descrizione del sistema:

Si vuole stabilire il flusso massimo di gas erogabile tramite una certa rete di condutture, rappresentata da un grafo $G = (V, A)$, a partire da una sorgente $s \in V$ e con destinazione $t \in V$. Ogni arco $(i, j) \in A$ rappresenta un tratto della conduttura ed ha una capacità massima pari a q_{ij}. Si consideri anche una quantità di flusso limite b_i per ogni nodo $i \in V$.

Modello di Programmazione Lineare:

$$x_{ij} := \text{ flow on arc } (i, j);$$

$$z := \text{ flow quantity};$$

$$(MF)\ z = \max \quad z$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki} = \begin{cases} +z & \text{if } i = s \\ -z & \text{if } i = t \\ 0 & \text{if } i \in V, i \ne \{s, t\} \end{cases} \tag{3a}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} \le b_i, \qquad i \in V$$

$$0 \le x_{ij} \le q_{ij}, \qquad (i, j) \in A$$

Esercizio 16

Descrizione del sistema:

Un negozio di animali domestici ha a disposizione n vasche d'acqua per esporre in vetrina un insieme di m pesci tropicali. Ogni vasca ha un costo pari a c_j ed un volume V_j. Si vuole minimizzare il costo totale delle vasche utilizzate per l'esposizione considerando che, per ragioni di spazio, il negozio può al massimo esporre K vasche. È noto un grafo $G = (V, E)$ in cui il generico lato e_{ih} rappresenta l'impossibilità per il pesce i di essere nella stessa vasca del pesce h (per ragioni legate alla catena alimentare...). E' inoltre nota una matrice binaria B in cui il generico elemento b_{ij} è uguale a 1 se il pesce i può essere assegnato alla vasca j e 0 altrimenti. Infine, ogni pesce i necessita per vivere uno spazio stimato pari a v_i. La somma dello spazio necessario a ogni pesce contenuto in una vasca non deve superare la capacità V_j.

Modello di Programmazione Lineare Intera:

$$y_j := \begin{cases} 1 & \text{se la vasca } j \text{ è utilizzata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n;$$

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se il pesce } i \text{ è assegnato alla vasca } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m;, \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{4a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leq K \tag{4b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, m \tag{4c}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq V_j y_j \qquad \forall j = 1, \ldots, n \tag{4d}$$

$$x_{ij} + x_{hj} \leq y_j \qquad \forall (i, h) \in E, j = 1, \ldots, n \tag{4e}$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \tag{4f}$$

Esercizio 17

Descrizione del sistema:

Un commesso viaggiatore deve visitare tutte le città rappresentate dai nodi $i \in V$ in un grafo $G = (V, A)$. Gli archi $(i, j) \in A$ presenti nel grafo rappresentano invece le vie di collegamento tra le città e ad ogni arco è associato un tempo di percorrenza t_{ij}. Il commesso viaggiatore vuole definire un circuito che visiti tutte le città minimizzando il tempo totale di percorrenza dei collegamenti. Inoltre, il commesso stima un consumo di carburante pari a c_{ij} associato

ad ogni collegamento, e in ogni caso vuole che le consegne siano terminate nei limiti dell'autonomia totale C concessa dal serbatoio.
Infine, il commesso ha stipulato accordi speciali con un sottoinsieme di clienti $i \in V'$. L'accordo, che il commesso intende mantenere, consiste nel garantire la visita tra i primi K clienti visitati. Naturalmente si suppone che $|V'| \leq K$.

Modello di Programmazione Lineare Intera:

$$u_i := \text{ordinire di visita del nodo } i \text{ nella soluzione}$$

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ è nel circuito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m; , \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$\min \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} \tag{5a}$$

$$\sum_{i \in V : (i,j) \in A}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in V \tag{5b}$$

$$\sum_{j \in V : (i,j) \in A}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V \tag{5c}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \leq C \tag{5d}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \qquad \forall i, j \in V, i \neq j \tag{5e}$$

$$u_1 = 0 \tag{5f}$$

$$u_i \leq K \qquad \forall i \in V' \tag{5g}$$

$$u_i \geq 0 \quad \text{intera} \qquad \forall i \in V, i \neq 1 \tag{5h}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall (i,j) \in A \tag{5i}$$